Activitats Unitat 3

Matemàtiques 3r ESO A

SOLUCIONS

1. Escriviu els cinc primers termes de les successions següents:

(a) $a_1 = -5$ i cada terme s'obté sumant 2 a l'anterior.

(b) $a_1 = 3$ i cadascun dels següents s'obté multiplicant per $\frac{1}{3}$ l'anterior.

(c) $a_1 = -3$, $a_2 = 4$ i els següents són la suma dels dos anteriors.

(d) $a_1 = 16$ i cadascun dels següents termes és la quarta part de l'anterior.

(a) $-5, -3, -1, 1, 3, \ldots$

(b) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

(c) $-3, 4, 1, 5, 6, \ldots$

(d) $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

2. Trobeu els cinc primers termes de les successions els termes generals de les quals són:

(a) $a_n = 3^{n-1}$ **(b)** $a_n = 15 + 2n$ **(c)** $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$

(a)
$$\begin{cases} a_1 = 3^{1-1} = 3^0 = 1 \\ a_2 = 3^{2-1} = 3^1 = 3 \\ a_3 = 3^{3-1} = 3^2 = 9 \\ a_4 = 3^{4-1} = 3^3 = 27 \\ a_5 = 3^{5-1} = 3^4 = 81 \\ \ldots \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} a_1 = 15 + 2 \cdot 1 = 15 + 2 = 17 \\ a_2 = 15 + 2 \cdot 2 = 15 + 4 = 19 \\ a_3 = 15 + 2 \cdot 3 = 15 + 6 = 21 \\ a_4 = 15 + 2 \cdot 4 = 15 + 8 = 23 \\ a_5 = 15 + 2 \cdot 5 = 15 + 10 = 25 \\ \ldots \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{1^2} = \dfrac{2+1}{1} = 3 \\ a_2 = \dfrac{2 \cdot 2 + 1}{2^2} = \dfrac{4+1}{4} = \dfrac{5}{4} \\ a_3 = \dfrac{2 \cdot 3 + 1}{3^2} = \dfrac{6+1}{9} = \dfrac{7}{9} \\ a_4 = \dfrac{2 \cdot 4 + 1}{4^2} = \dfrac{8+1}{16} = \dfrac{9}{16} \\ a_5 = \dfrac{2 \cdot 5 + 1}{5^2} = \dfrac{10+1}{25} = \dfrac{11}{25} \\ \ldots \end{cases}$$

3. Trobeu els cinc primers termes de la següent successió donada per recurrència:

$$a_1 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1}^2 - 3n$$

$a_1 = 2$

$a_2 = 2a_{2-1}^2 - 3 \cdot 2 = 2a_1^2 - 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2^2 - 6 = 8 - 6 = 2$

$a_3 = 2a_{3-1}^2 - 3 \cdot 3 = 2a_2^2 - 3 \cdot 3 = 2 \cdot 2^2 - 9 = 8 - 9 = -1$

$a_4 = 2a_{4-1}^2 - 3 \cdot 4 = 2a_3^2 - 3 \cdot 4 = 2 \cdot (-1)^2 - 12 = 2 - 12 = -10$

$a_5 = 2a_{5-1}^2 - 3 \cdot 5 = 2a_4^2 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot (-10)^2 - 15 = 200 - 15 = 185$

4. Donada la progressió aritmètica de terme general $a_n = 6n + 2$, trobeu la suma dels 25 primers termes.

La suma dels 25 primers termes de la progressió aritmètica de terme general $a_n = 6n + 2$ ve donada per:

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25$$

on

$$a_1 = 6 \cdot 1 + 2 = 6 + 2 = 8$$

i

$$a_{25} = 6 \cdot 25 + 2 = 152$$

Aleshores,

$$S_{25} = \frac{8 + 152}{2} \cdot 25 = 2000$$

5. Amb les dades de les progressions aritmètiques següents:

(a) $a_1 = 4$ i $a_2 = 6$, calculeu d, a_{10} i el terme general, a_n.

(b) $b_1 = 8$ i $b_3 = 3$, calculeu d, b_{10} i el terme general, b_n.

(a) Per definició de progressió aritmètica, $d = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$. Calculem, ara, el terme general:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot 2 = 4 + 2n - 2 = 2 + 2n$$

Així, $a_{10} = 2 + 2 \cdot 10 = 22$.

(b) També, en aquest cas, per definició de progressió aritmètica, $d = \dfrac{3-8}{2} = \dfrac{-5}{2} = -\dfrac{5}{2}$. El terme general serà:

$$b_n = b_1 + (n-1) \cdot d = 8 + (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$$

Aleshores,

$$b_{10} = 8 + (10-1) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 8 + 9 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{29}{2}$$

6. Donada la successió $5, 2, -1, -4, 7, \ldots$

(a) Raoneu per què es tracta d'una progressió aritmètica i calculeu la diferència.

(b) Trobeu-ne el terme general.

(c) Calculeu-ne el terme 30.

(a) Observem que si restem dos termes consecutius qualssevol sempre ens dóna -3, que és la diferència de la progressió aritmètica donada.

(b) El terme general és:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot (-3) = 5 - 3n + 3 = 8 - 3n$$

(c) El terme 30 serà:

$$a_{30} = 8 - 3 \cdot 30 = 8 - 90 = -82$$

7. Calculeu la suma dels 100 primers nombres parells consecutius.

Els nombres parells formen una progressió aritmètica de primer terme $a_1 = 2$ i diferència $d = 2$. El terme general es pot escriure com:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$$

conclusió a què podíem haver arribat, més rapidament, només que haguéssim tingut en compte que, els nombres parells, no són més que les nombres múltiples de 2.
La suma dels 100 primers nombres parells serà:

$$s_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{2 + 200}{2} \cdot 100 = 10100$$

8. Vull col·locar 7 fileres de llibres de manera que a la primera fila hi posaré 3 llibres, i cadascuna de les files següents tindrà 3 llibres més que l'anterior. Quans llibres col·locaré en total?

El problema defineix una progressió aritmètica de primer terme $a_1 = 3$ (poso tres llibres a la primera fila) i diferència $d = 3$ (a cada fila hi poso 3 llibres més que a l'anterior). En total hi ha 7 files. El nombre de llibres que posaré a la fila 7 serà:

$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot 3 = 3 + 6 \cdot 3 = 21$$

Per tant, el nombre total de llibres que posaré en les 7 files és:

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{3 + 21}{2} \cdot 7 = 84$$

és a dir, 84 llibres.