



SOLUCIONS

1. Escriuiu els cinc primers termes de les successions següents:

(a) $a_1 = 5$ i cada terme s'obté sumant 2 a l'anterior.

(b) $a_1 = 2$ i cadascun dels següents s'obté multiplicant per $\frac{1}{2}$ l'anterior.

(c) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ i els següents són la suma dels dos anteriors.

(d) $a_1 = 8$ i cadascun dels següents termes és la meitat de l'anterior.

(a) 5, 7, 9, 11, 13, ...

(c) -3, 4, 7, 11, 18, ...

(b) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...

(d) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ...

2. Trobeu els cinc primers termes de les successions els termes generals de les quals són:

(a) $a_n = 2^n$

(b) $a_n = 5 - 3n$

(c) $a_n = \frac{n+3}{n^2}$

$$(a) \begin{cases} a_1 = 2^1 = 2 \\ a_2 = 2^2 = 4 \\ a_3 = 2^3 = 8 \\ a_4 = 2^4 = 16 \\ a_5 = 2^5 = 32 \\ \dots \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} a_1 = 5 - 3 \cdot 1 = 5 - 3 = 2 \\ a_2 = 5 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1 \\ a_3 = 5 - 3 \cdot 3 = 5 - 9 = -4 \\ a_4 = 5 - 3 \cdot 4 = 5 - 12 = -7 \\ a_5 = 5 - 3 \cdot 5 = 5 - 15 = -10 \\ \dots \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} a_1 = \frac{1+3}{1^2} = \frac{4}{1} = 4 \\ a_2 = \frac{2+3}{2^2} = \frac{5}{4} \\ a_3 = \frac{3+3}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ a_4 = \frac{4+3}{4^2} = \frac{7}{16} \\ a_5 = \frac{5+3}{5^2} = \frac{8}{25} \\ \dots \end{cases}$$

3. Trobeu els cinc primers termes de la següent successió donada per recurrència:

$$a_1 = -1, \quad a_n = n + a_{n-1}$$

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = 2 + a_{2-1} = 2 + a_1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_3 = 3 + a_{3-1} = 3 + a_2 = 3 + 1 = 4$$

$$a_4 = 4 + a_{4-1} = 4 + a_3 = 4 + 4 = 8$$

$$a_5 = 5 + a_{5-1} = 5 + a_4 = 5 + 8 = 13$$

4. Donada la progressió aritmètica de terme general $a_n = 10 - 5n$, trobeu la suma dels 25 primers termes.

La suma dels 25 primers termes de la progressió aritmètica de terme general $a_n = 10 - 5n$ ve donada per:

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25$$

on

$$a_1 = 10 - 5 \cdot 1 = 10 - 5 = 5$$

i

$$a_{25} = 10 - 5 \cdot 25 = 10 - 125 = -115$$

Aleshores,

$$S_{25} = \frac{5 - (-115)}{2} \cdot 25 = -1375$$

5. Amb les dades de les progressions aritmètiques següents:

(a) $a_1 = 13$ i $a_2 = 5$, calculeu d , a_8 i el terme general, a_n .

(b) $b_3 = 3$ i $d = -5$, calculeu b_1 , b_{10} i el terme general, b_n .

(a) Per definició de progressió aritmètica, $d = a_2 - a_1 = 5 - 13 = -8$. Calculem, ara, el terme general:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 13 + (n - 1) \cdot (-8)$$

$$\text{Així, } a_8 = 13 + (8 - 1) \cdot (-8) = 13 - 56 = -43.$$

(b) També, en aquest cas, per definició de progressió aritmètica, $b_1 = b_3 - 2d = 3 - 2 \cdot (-5) = 3 + 10 = 13$. El terme general serà:

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d = 13 + (n - 1) \cdot (-5)$$

Aleshores,

$$b_{10} = 13 + (10 - 1) \cdot (-5) = -32$$

6. Donada la successió $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

(a) Raoneu per què es tracta d'una progressió aritmètica i calculeu la diferència.

(b) Trobeu-ne el terme general.

(c) Calculeu-ne el terme 30.

(a) Observem que si restem dos termes consecutius qualssevol sempre ens dóna $\frac{1}{2}$, que és la diferència de la progressió aritmètica donada.

(b) El terme general és:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = \frac{1}{2} + (n - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

(c) El terme 30 serà:

$$a_{30} = \frac{1}{2} + (30 - 1) \cdot \frac{1}{2} = 15$$

7. Calculeu la suma dels 100 primers nombres senars consecutius.

Els nombres parells formen una progressió aritmètica de primer terme $a_1 = 1$ i diferència $d = 2$. El terme general es pot escriure com:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

La suma dels 100 primers nombres parells serà:

$$s_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 199}{2} \cdot 100 = 10000$$

8. El nombre d'usuaris d'un poliesportiu els caps de setmana era, alcomençament, de 150 persones, però va augmentar en 30 persones cada cap de setmana a partir de llavors.

(a) Quants usuaris va tenir el cap de setmana 12?

(b) Quants usuaris va tenir, en total, els 10 primers caps de setmana?

El problema defineix una progressió aritmètica de primer terme $a_1 = 150$ (nombre d'usuaris inicial) i diferència $d = 30$ (cada cap de setmana el nombre d'usuaris augmenta en 30 persones). El terme general de la progressió és:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 150 + (n - 1) \cdot 30 = 150 + 30n - 30 = 120 + 30n$$

(a) Per calcular el nombre d'usuaris el cap de setmana que fa 12, hem de trobar a_{12} :

$$a_{12} = 120 + 30 \cdot 12 = 480$$

(b) El nombre d'usuaris, total, del poliesportiu durant els 10 primers caps de setmana correspon a la suma dels 10 primers termes de la progressió aritmètica definida:

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$$

on $a_{10} = 120 + 30 \cdot 10 = 420$. Aleshores:

$$S_{10} = \frac{150 + 420}{2} \cdot 10 = 2850$$

és a dir, durant els primers 10 caps de setmana van visitar el poliesportiu 2850 usuaris.